試験 VWO

2021

第 1 期

5 月 17 日（月）

13：30－16：30

数学 A

この試験には，ワークシートがあります
採点基準文書の後に問題の修正が掲載されています

この試験は 21 問からなります.
この試験の最高得点は 82 点です.
各問の番号ごとに，正解すると何点になるかが示されています.
問で記述，説明あるいは計算が求められている場合，答えにそれらがない場合には得点は与えられません.
求められていること以上の答え（理由，例など）を書かないようにしなさい．例えば，２つの理由が問われ，３つ以上の理由を与えた場合，最初の２つのみが評価の対象となります.

2013 年に行われた研究では，左利きの人は右利きの人に比べて，概数を選びやすいことを明らかにしています.
この研究の被験者には，その答えが整数であるような 60 個の問いが与えられました.
例えば，次のような問いです.
— あなたの衣装には，いくつボタンがありますか?
— あなたは，何種類の動物の名前をいえますか?
— あなたは，昨年たまごをいくつ食べましたか?

この研究は，その答えが 20 から 1000 までであったような問いについて検討した．左利きの人は右利きの人と比べて概数を答える傾向があった.
ここでいう概数とはいったい何でしょうか? 一般に概数とは，0 や複数の 0 で終わる数で，例えば 20 や 300 という数です．しかし，100 と 1000 とでは，どちらがより概数らしい数であるといえるでしょうか? また，0 で終わらないけれども，25 のような「美しい」数についてはどうでしょうか?

数の概数らしさを定めるため，この研究者たちは **Sigurd の定義**を用いた．この定義では，数の**概数らしさ**は，その数が 10 のべき乗の倍数か，10 のべき乗の半分か四分の一であるかによって定まる．概数らしさのを示す値 R は，20 から 1000 までの数 (n) について，次の式によって計算される.

$$R(n)=\frac{1000}{n}+\frac{100}{n}+\frac{10}{n}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{500}{n}+\frac{50}{n}+\frac{5}{n}\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{250}{n}+\frac{25}{n}\right)$$

各項 $\frac{\cdots}{n}$ は，n が分子の倍数である場合にカウントされる.
n が分子の倍数である場合，$R(n)$の値は大きくなることがわかる．例えば，n が 600 の場合は，次のようになる.

$$R(600)=\cancel{\frac{1000}{600}}+\frac{100}{600}+\frac{10}{600}+\frac{1}{2}\cdot\left(\cancel{\frac{500}{600}}+\frac{50}{600}+\frac{5}{600}\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(\cancel{\frac{250}{600}}+\frac{25}{600}\right)\approx 0{,}24$$

問 1． この式を用いて，750 と 600 の 2 数では，どちらがより概数らしい数であるか求めなさい． (4 点)

1000 は 500 よりも概数らしさを示す値は大きい．しかしながら，600 は 500 に比べて，概数らしさを示す値が大きいということにはならない．実際，500 と 1000 の間の 100 きざみの数では，概数らしさを示す値はだんだんと小さくなっていく．
こここことを，先の式を，500 から 1000 の間の 100 きざみの数だけに当てはまるように書き直すことによって考察することができる．このことは，$n = 100p$ (ここで p は 6 から 9 までの整数)を代入し，元の式を$R = \frac{23}{16p}$に変形することによって可能となる．

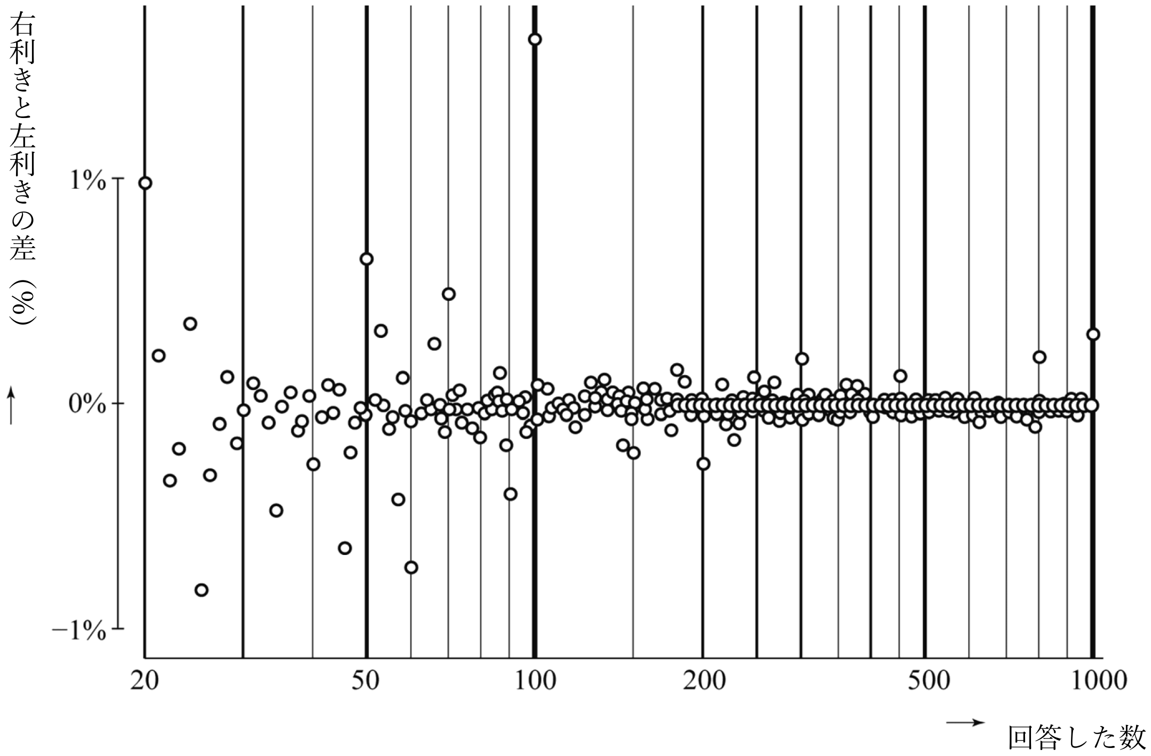
問２．式に数を代入したりスケッチをしたりしないで， 500 から 1000 までの 100 きざみの数の概数らしさの値がだんだん小さくなることを，この式を用いて説明しなさい．（４点）

この研究には 200 名の被験者が参加し，各人に 60 の問いが出された．回答の 1.3%は，1000 より大きい数であった．これらの回答及び 20 より小さい回答を除くと，左利きの人の回答は 3,412 で，右利きの人の回答は 4,329 であった．

問３．20 より小さい回答は何パーセントであるか，小数第 1 位まで求めなさい．

次の図は左利きの人と右利きの人の回答の全体像である. 左利きの人の 3412 の回答のうち, 6.7% が 20 という数である. 右利きの人の 4329 の回答では, このパーセントは 5.7 である. これら２つのパーセントの差は 1 である．この図で，20 の数のところのドッドの高さが 1% であることがわかる．

図



横軸は対数目盛である．

この図では，ある数を通る鉛直線が太ければそれだけ，その数が概数とみなされるように示している．

多くの概数では，それを回答するパーセントは，左利きの人は右利きの人よりも多い．

左利きの人は，100 の回答を 276 回している．

問４．右利きの人，100 の回答を何回しているか計算しなさい．（４点）

ここに２つの主張を示す．

1. 数が大きくなれば，選ばれる頻度は少なくなる．
2. 大きな数を回答する左利きの人と右利きの人の頻度はほとんど同じである．

問５．これらの主張が，図の情報から導かれるかどうか説明しなさい．（４点）

問１．最高得点４点

・$R(750)$では，$\frac{1000}{n}, \frac{100}{n}, \frac{500}{n}$はカウントされない． 1

・$R(750)=\frac{10}{750}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{50}{750}+\frac{5}{750}\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{250}{750}+\frac{25}{750}\right)$ 1

・ $R(750)=0.14\ldots$ 1

・したがって，600 はより概数らしい数である． 1

問２．最高得点４点

・$n=100p$ を代入すると，$R=\frac{1}{p}+\frac{1}{10p}+\frac{1}{4p}+\frac{1}{40p}+\frac{1}{16p}$ となる． 1

・整理すると，$R=\frac{23}{16p}$ 1

・p が(6 から 9 へと)増大すると，$\frac{23}{16p}$の分母は大きくなる（また，分子は定数である）． 1

・分母が大きくなると，$R=\frac{23}{16p}$（つまり，概数らしさの値）は小さくなる． 1

問３．最高得点４点

・得られた総回答数は 60・200 = 12000 1

・1000 より大きい回答数は，0.013・12000 = 156 1

・20 より小さい回答数は，12000－3412－4329－156= 4103 である． 1

・$\frac{4103}{12000}\cdot 100=34.2$ (%) 1

または

・得られた総回答数は 60・200 = 12000 1

・総回答数のうち 20 から 1000 までの回答は，3412＋4329 = 7741，あるいは，
$\frac{7741}{12000}\cdot 100=64.5$ (%) 1

・1000 より大きい回答の割合の 1.3 (%)を引く． 1

・$\frac{4103}{12000}\cdot 100=34.2$ (%) 1

・よって，20 までの回答は，100－64.5－1.3 = 34.2 1

問４．最高得点４点

・$\frac{276}{3412}\cdot 100 = 8.08\,(\%)$ 1

・左利きと右利きの人の割合（%）の差を読み取り，1.6%. 1

・右利きの人の割合は1.6%. 1

・4329 回の 6.5%は 281 回. 1

注

この問いでは，読み取りの許容範囲は 0.1%とする.

問５．最高得点４点

次のような解答：

・主張１はこの図からは従わない．なぜならば，大きな数に対しても頻繁に回答があり，左利きと右利きの人の回答がほぼ等しい. 2

・主張２はこの図から従う．なぜならば，大きい数で，多くの場合に割合の差はほとんど 0 である. 2

留意点

－　受験者が根拠のない推論や正しくない推論をしている場合，関連する解答項目については得点を与えない.

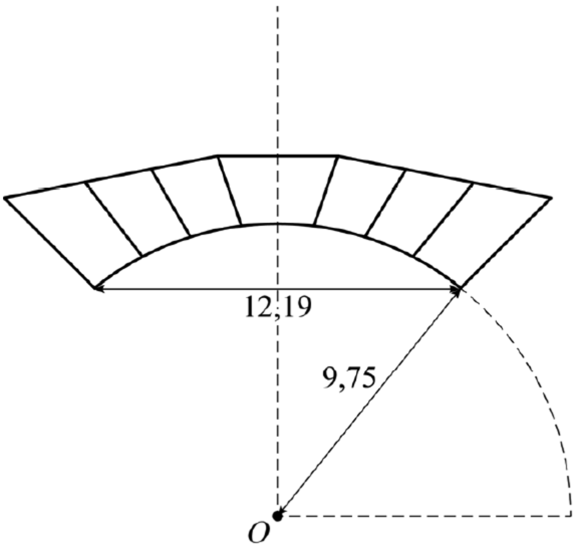
－　両方の解答項目に関して，完全に正しいとはいえない解答には，1 点を与えてもよい.

写真 1

写真 2

写真 1 は，ケンブリッジにある「Mathematical Bridge」と呼ばれる木造の橋です.
この橋は，1748 年にウィリアム・イーサリッジ（William Etheridge）が設計したものです．よく見ると，橋は架空のアーチ（橋の底で形成される）に接するいくつもの梁で構成されていることがわかります．写真 2 参照.
この橋の数理モデルを作成します．橋の底の幅は 12.19m で，その底は半径 9.75m の円の一部であると考えます．中心が(0, 0)で半径が r の円の式は $x^2+y^2=r^2$ です.

図



図のように原点 O を選ぶと、橋の底の高さは: $y=\sqrt{95.0625-x^2}$ （ここで，x，y の単位は m です）

問１． $y=\sqrt{95.0625-x^2}$ がこのモデルに適合していることを示しなさい．（３点）

橋の下を多くの船が行き交います．そのため，ある地点で，水位から橋の底がどれくらいの高さになっているかを知ることが重要です.

問２． 橋の始点と橋底の一番高いところの高低差を計算しなさい．答えは cm で与えなさい．（３点）

写真 3 では，橋の歩道の始点とほぼ平行に走る接線を見ることができます．この接線は，点(−1.90, 9.56)で，円に接します．写真には，この点と接線の始点が示されています.

写真３

問３． 微分の公式を用いて，$y'(-1.90)$の値を計算し，この値の実用上の意味を説明しなさい．（４点）

問１．最高得点３点

・$x^2+y^2=9.75^2$ 1

・$y^2=95.0625-x^2$ 1

・$y=\sqrt{95.0625-x^2}$ $(y=-\sqrt{95.0625-x^2}$ は解にならない) 1

問２．最高得点３点

・最高点は $y(0)=9.75\ (m)$ の地点である. 1

・曲線の始点は $y(-6.095)=7.61...\ (m)$. 1

・高さの差は 214 (cm) (あるいは 2.14 m). 1

問３．最高得点４点

・$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}(95.0625-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot -2x$ 1

・$y'(-1.90)=0.198...$ 1

・つぎのような答え。（橋の歩道は）最初の部分の勾配が約 0.2（または勾配が約 20(%)）である. 1

注

― 微分にチェーンルールが使われなかった場合，最初の要素に得点は与えられない場合があります.

― 最初の解答要素については，不正解の場合でも 1 点を与えることができる.

世帯の**一次所得**は，その世帯に属するすべての人の仕事と財産からのすべての総所得の合計です．世帯内に有給労働や資産を持つ人がいない場合，その世帯の一次所得はゼロとなります．
2014 年のオランダの全世帯の一次所得の総額は 3763 億ユーロでした．当時の総世帯数は 780 万世帯，総人口は 1670 万人であした．
表では，全世帯を一次所得によってランク付けし，ほぼ同数の世帯からなる 10 のグループに分けています．第一グループには一次所得が最も低い世帯が，第十グループには一次所得が最も高い世帯が含まれます．

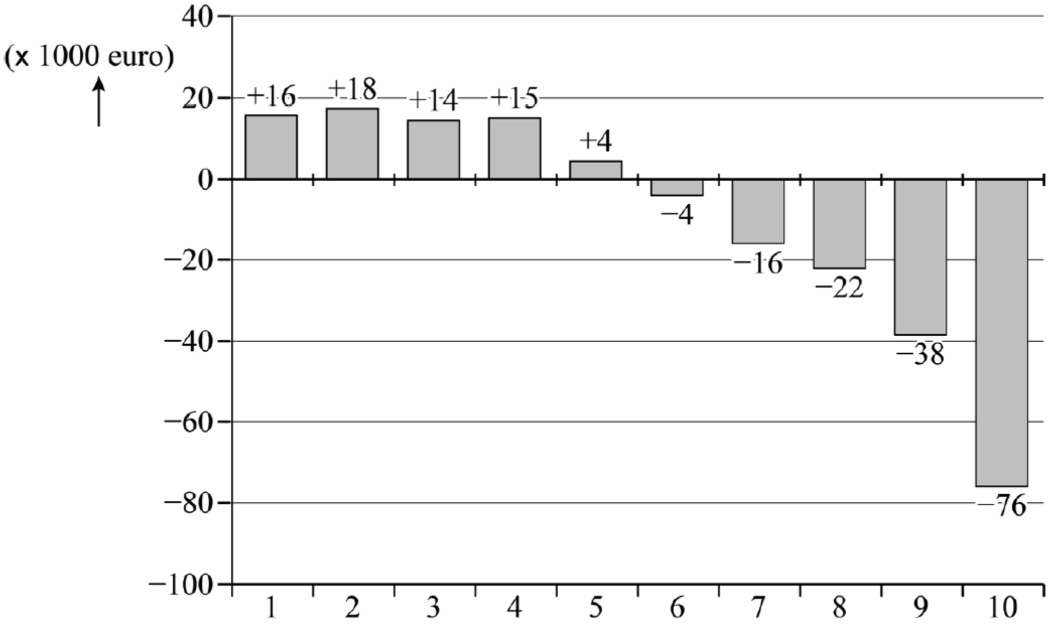
表

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
aandeel primair inkomen (%)	0	0	1	3	5	8	12	16	20	35
aantal huishoudens (x 1000)	784	769	776	777	777	777	777	777	777	776
aantal personen (x 1000)	1138	1041	1234	1330	1466	1597	1851	2155	2381	2535

例えば，一次所得が最も高いグループは 776,000 世帯，2535,000 人で構成されていることがわかります．
総粗利益 3,763 億ユーロのうち，35%がこのグループに属しています．これは，1,317 億 5 百万ユーロです．
個人間の所得格差の程度を S で表し，S を次のように定義します．
S は，第 10 グループの **1 人当たり**平均所得から第 1 グループの **1 人当たり**平均所得を差し引いたものです．
上記のデータで計算すると，一次所得の S は約 51,955 ユーロとなります．

オランダ政府は，給付と課税によって所得格差を是正しています．
ある世帯の一次所得に，受け取った給付金をすべて加え，支払った税金をすべて差し引くと，その世帯の二次所得がわかります．
図は，表と同じ 10 グループの世帯について，1 世帯あたりの二次所得と一次所得の差を示したものです．

図　一世帯あたり二次所得から一次所得を差し引いた金額



図では，例えば，第 1〜5 グループの 1 世帯あたりの二次所得が一次所得より高いことがわかると思います.

つまり，納税額よりも受給額の方が多いということです.

給付金や税金があるので，一次所得より二次所得の方が S は小さくなります.

問１．2014 年に S が一次所得より二次所得で 30,000 ユーロ以上低いかどうかを調べなさい.（７点）

問１．最高得点７点

・図からわかるように，第 1 グループでは 1 世帯あたりの二次所得が一次所得よりも 16 000（ユーロ）高く，第 10 グループでは 76 000（ユーロ）低くなっている． 1

・第一グループの副収入の合計は，16000・784 000=12544000000（ユーロ）です． 1

・第 10 グループの副収入の合計は，131705 000−76 000=776 000=72729000000（ユーロ）です． 1

・第一グループの一人当たりの平均二次所得は，12544000000/1138000=11022…（ユーロ）です． 1

・第 10 グループの一人当たりの平均副収入は 72729000/2535000=28689…（ユーロ）です． 1

・したがって，*S* は（二次所得水準で）28 689...−1022…=17 667…（ユーロ）です． 1

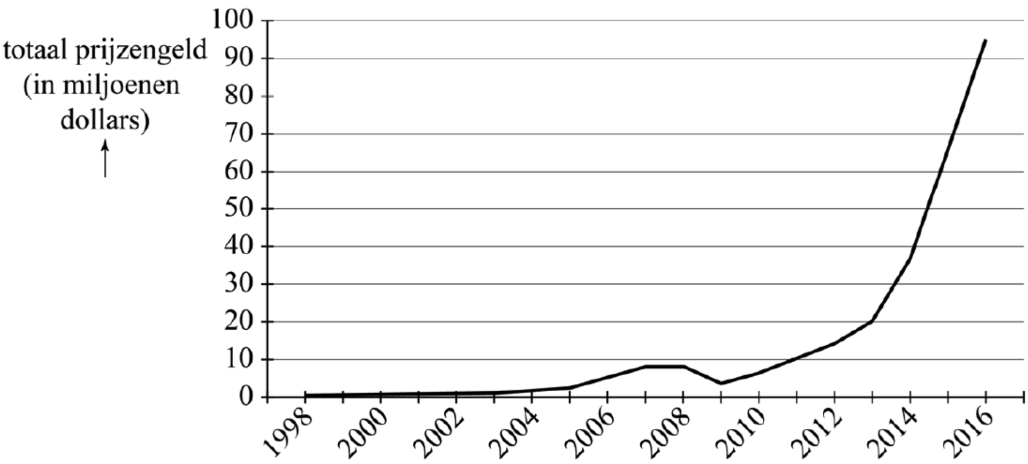
・*S* は（二次所得時）（51955−17667…=34287…）30000（ユーロ）より少ない（一次所得時）です． 1

エレクトロニック・スポーツはE-Sportsと略され，コンピュータゲームの対戦プレイを指す言葉です．コンピュータゲームを他のプレイヤーと対戦することは，ゲームと同じくらい古くから行われていますが，一般にE-Sportsは1998年から始まったと言われています．その年に初めて賞金付きの公式Eスポーツ大会が開催されました．1998年当時，プレイヤーは総額10万ドル程度を稼ぐことができました．
以来，E-Sportsは国際的な現象に成長しました．

2016年には，数万人のプレイヤーが約百種類のゲームで競い合い，賞金総額は9500万ドル以上となりました．

図1は，E-Sportsで獲得した賞金総額の推移を示したものです．

図1



2009年から2016年にかけて，賞金総額は370万米ドルから9510万米ドルへと増加しました．この伸びは指数関数的で，しかも2016年以降も指数関数的に続くと仮定すれば，数年後には賞金総額が10億円以上に増えることになります．
問1． 2009年と2016年のデータを使って，そのようになる年を計算しなさい．（4点）

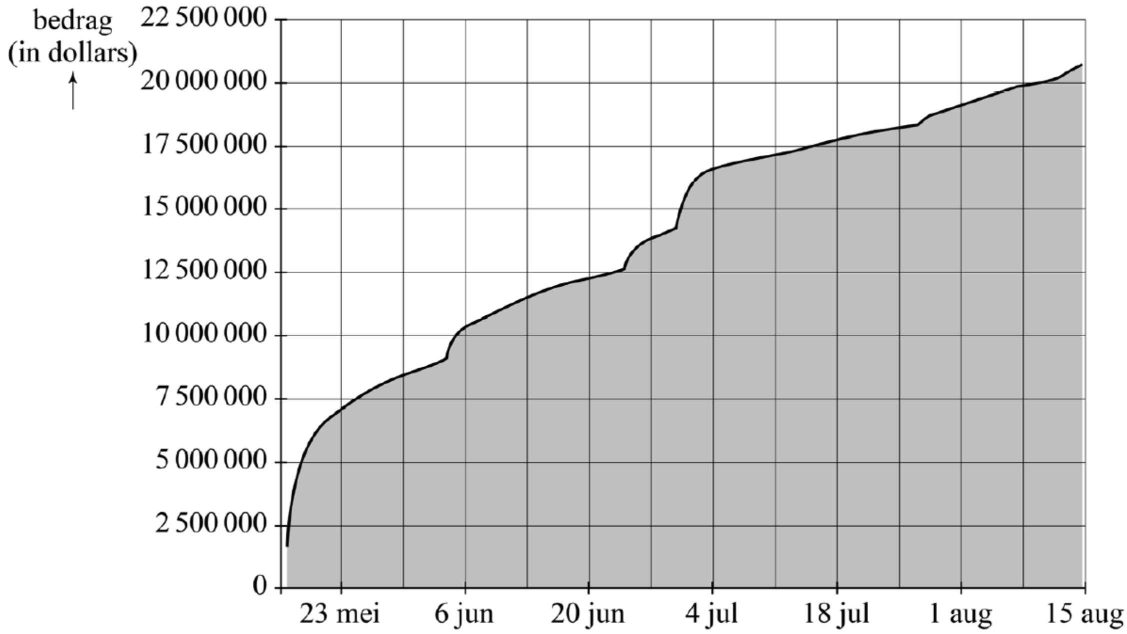
Eスポーツの賞金総額の約半分は，ある特定のゲームのプレーヤーが獲得している．Eスポーツのゲームは，5人ずつの2チームでプレイし，各プレイヤーは自分のヒーローを操作します．プレイヤーは，コンピュータで制御された軍隊の助けを借りて，相手の領土を征服することを目指します。

このゲームには 112 種類のヒーローが登場し，アタッカー49 名，ディフェンダー27 名，残りのヒーローはサポートヒーローという 3 つのカテゴリーに分かれています.
ゲーム開始時に，複雑なシステムに従って，各チームが順番にヒーローを選びます．各ヒーローは 1 回のみ選択可能です.
通常，チームはアタッカー2 名，ディフェンダー1 名，サポートヒーロー2 名で構成されます.
問２．アタッカー2 名，ディフェンダー1 名，サポートヒーロー2 名の編成は何通りあるか計算しなさい.（４点）

各チームに 5 人のヒーローがいます．チーム同士が戦うゲームエリアは，大きく分けて「北」「中」「南」の 3 つのゾーンに分けられます．ヒーローは，この 3 つのゾーンのいずれかに役割を割り当てることができます．さらに，ヒーローがゾーンを行き来することも可能で，これを「ローヴィング（放浪）ヒーロー」と呼んでいます．つまり，主人公の役割には，実は「ノース」「ミドル」「サウス」「ローヴィング」という 4 つの可能性があります.
チームは常に 3 つのゾーンに少なくとも 1 人のヒーローを配置することを選択します．例えば，北に 1 人，中央に 1 人，南に 2 人，そして放浪のヒーローが 1 人という配分が考えられます．どのヒーローがどのゾーンにいるかは重要でないと考えています.
問３．北，中央，南の各ゾーンに少なくとも 1 人のヒーローがいなければならない場合，1 つのチームにいくつのこのような分割が可能か計算しなさい.（４点）

このゲームでは，年間を通じてさまざまな賞金のトーナメントが開催されているが，最も重要なトーナメントは，毎年 8 月に開催される「ザ・インターナショナル（The International）」である．世界中から集まったチームは，予選トーナメントを経て 16 枚の参加券を手に入れようとします．それには理由があり，2016 年の「ザ・インターナショナル」の賞金総額は 2,000 万ドル以上でした.
「ザ・インターナショナル」で賞金が高額なのは，この大会がクラウドファンディングで運営されているからです．つまり，ゲームのプレイヤーは，トーナメントに先立つ一定期間，賞金プールに貢献することができるのです.
「ザ・インターナショナル 2016」の賞金総額の推移を図 2 に示します.

図２



「ザ・インターナショナル 2016」の賞金総額は，以下のように構成されました．大会の主催者（この場合はゲームの開発者）は，一定の開始金額を賞金プールに投入する．
5 月 16 日以降，開発元はゲーム内で使用できる仮想オブジェクトを購入する機会を提供しました．その収益金のうち 25%が賞金として加算されました．
図 2 のグラフは、以下の式で合理的に近似することができます．

$$P = 8.157 \cdot \ln(0.1(t+10)) + 1.6$$

この式において，P は賞金総額（百万ドル），t は 2016 年 5 月 16 日の $t=0$ を基準とした日数での時間である．
E-Sports の大会をレポートするサイトによると，プレイヤーは 1 ヶ月の間に 4000 万ドルを仮想オブジェクトに費やしたそうです．
問４．P の式で，何日後にそうなったかを計算しなさい．（４点）

図 2 のグラフを見ると，賞金総額の増加には規則性がないことがわかる．これは，開発者が時折，プレイヤーを誘うために特別なアクションを考え，追加でアイテムを購入させたからです．
例えば，6 月 30 日のプロモーションがその一つです．この日，賞金総額は 112 万 5 千ドルも増加しました．これは，P の導関数の値から予想されるよりもはるかに大きな増加です．
問５．微分法を用いて，6 月 30 日の時点では，P の導関数の値に基づいて期待される値よりも何倍に増えたか計算しなさい．整数値で答えなさい．（５点）

問１．最高得点４点

・年間の増大因子は $\left(\frac{95.1}{3.7}\right)^{\frac{1}{7}}=1.59...$ 1

・方程式 $95.1\cdot 1.59...^{t}=1000$ を解かなくてはならない. 1
・この方程式の解法が記述されている（例えば数表を用いて） 1
・答えは $t=5.07...$, よって 2022 年（あるいは 2021 年）. 1

注

– $(95.1-3.7)^{\frac{1}{7}}$ を使用する場合，この問題で認められる最大得点は 2 である.

– $\frac{95.1}{3.7}\div 7$ を使用する場合，この問題には 2 ポイントまで与えられる.

問２．最高得点４点
・サポートヒーローは 36 人. 1

・アタッカー $\binom{49}{2}$ 通り, サポートヒーロー $\binom{36}{2}$ 通りから選ぶことができます. 1

・$\binom{49}{2}\cdot\binom{36}{2}\cdot 27$ を計算する. 1

・答えは 20003760 です. 1

問３．最高得点４点
・北，中，南の 3 つのゾーンにはそれぞれ 1 人ずつヒーローを配置しなければならないので, さらに 2 人のヒーローを分配する必要があります. 1
・この 2 人のヒーローが同じポジションを与えられた場合，4 人の可能性がある（北，中，南，放浪）. 1

・異なる位置に配置された場合，$\binom{4}{2}=6$ の可能性があります. 1

・答えは 4+6=10 通り. 1

注

考えられるすべての場合を書き出すことによって答えを見つけた場合，落ちがあったり，間違っていたりするごとに 1 点減点します.

問４．最高得点４点

・t=0 では, P=1.6 なので, 開始金額は 1.6（百万ドル）であった. 1

・仮に 4000 万ドルがプレイヤーによって使われたとすると，1000 万ドルが賞金プールに追加されたことになる. 1

・方程式 $8.157 \cdot \ln(0.1(t+10)) + 1.6 = 11.6$ の解法が記述されている. 1

が解ける。

・答え : $t = 24.07...$ で, 25（または 24）（日）後. 1

注

－ $P = 40$ の式を解いた場合，この問題で 2 点まで認めます.

－ $P = 10$ の式を解いた場合は，この問題に 3 点まで与えます.

問５．最高得点５点

・6 月 30 日には, $t = 45$. 1

・$\dfrac{dP}{dt} = 8.157 \cdot \dfrac{1}{0.1(t+10)} \cdot 0.1$ (または同値な式) 2

・$\dfrac{dP}{dt}(45) = 0.14...$ 1

・$\dfrac{1.125}{0.14} = 7.58...$, よって 8 倍. 1

注

－ 微分法で連鎖法則が使われなかった場合，2 つ目の回答項目には得点は与えられない場合があります.

－ 解答の 2 番目の要素については，完全に正しい答えではない場合には 1 点を付与することができます.

ニューヨークは何十年もの間，世界で最も住みたい街のひとつであり，その結果，賃貸住宅の平均価格は高騰している．1970 年，ニューヨークの住宅の平均家賃は月 125 ドルだった．2013 年には，それが月額 917 ドルにまで上昇しました．これは 600%以上の増加です．

しかし，お金の価値も変化するため，このような比較は完全に公平とは言えません．それをインフレといいます．1970 年以降，年平均のインフレ率は 3.95%です．1970 年以降，他の要因とは無関係に，インフレによって家賃が毎年 3.95%上昇していると仮定する．

1970 年の 125 ドルを 2013 年のドルに換算することで，実質的な平均家賃の上昇率を算出することができます．実質平均賃料の上昇率は，インフレによる上昇率を上回る平均賃料の上昇率である．

問１．実際の賃貸価格の上昇を計算しなさい．答えは，小数第一位で求めなさい．（4 点）

この課題では，すべての金額，数値，および比率は，2013 年のドル換算額で計算しています．したがって，インフレ率を考慮する必要はありません．さらに，本課題の他の部分では，収入，家賃，家賃負担と表記していますが，本書の他の部分では，平均収入，平均家賃，平均家賃負担と表記している．

賃貸住宅の供給可能性を検討する上で重要な指標となるのが，家賃の支払いに費やす収入の割合（家賃負担）である．

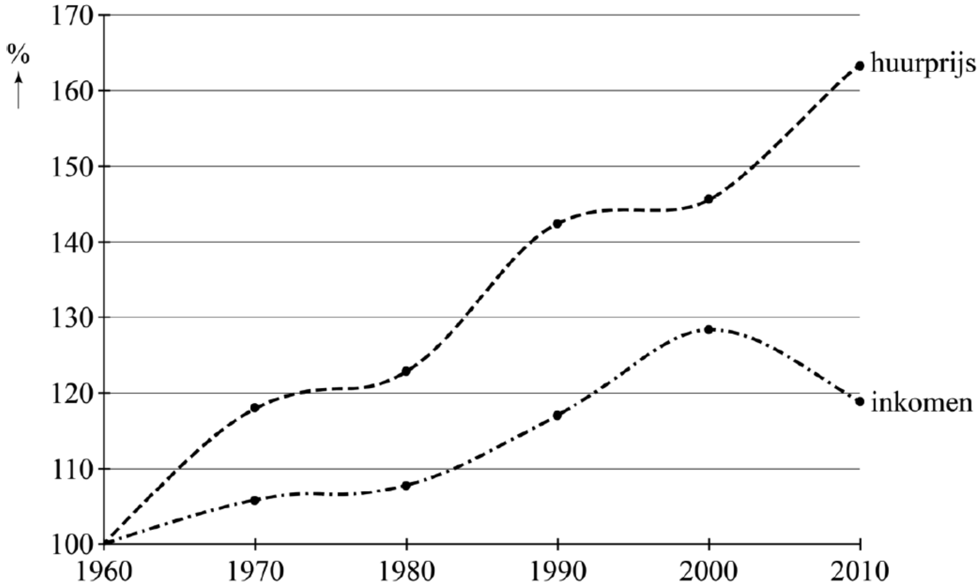
1960 年のニューヨークの家賃は 561 ドルで，家賃負担率は 15%であった．

家賃が収入を上回る勢いで上昇する中，家賃負担は増え続け，1960 年には 15%だったのが，2013 年には 21%になっています．ある経済学者は，家賃負担が 25%を超えると大きな問題が発生すると主張している．このエコノミストは，1960 年以降，家賃負担が指数関数的に増加し，この指数関数的な増加は 2013 年以降も続くと仮定している．

問２．この前提で，何年目に初めて家賃負担が 25%を超えるかを計算しなさい．（４点）

下の図は，1960 年のニューヨークの家賃と住民の所得金額の推移を，時間軸でプロットしたものである．

図２



以下は，図のデータを扱った 2 つの主張です.

１．1960-1980 年の期間は，1980-2000 年の期間よりも家賃の上昇率が高い.

２．1990 年から 2000 年にかけては，賃料が減少しています.

問３．それぞれの記述について、それが正しいかどうかを説明してください。（４点）

問１．最高得点４点

・1970 年以降のインフレ率の成長因子は1.0395^{43} 1

・1970 年の 125(ドル)は, 2013 年には$125\cdot 1.0395^{43}=661...$(ドル)に相当する. 1

・ $\frac{917-661....}{661....}\cdot 100=38.67...$ 1

問１．最高得点４点

・1960 年から 2013 年までの成長係数は$\frac{21}{15}=1.4$. 1

・つまり, 1 年あたりの成長率は$1.4^{\frac{1}{53}}=1.00636...$. 1

・方程式$15\cdot 1.00636...^{t}=25$の解法が説明されている例えば, 数表を用いる). 1

・答え:$t=80.4....$ よって, 2041 年(または 2040 年). 1

注

－ $(21-15)^{\frac{1}{53}}$を使用する場合，この問題で認められる最大得点は 2 である.

－ $\frac{21}{15}\div 53$を使用する場合，この問題には 2 ポイントまで与えられる.

問２．最高得点４点

・1960 年，1980 年，2000 年のグラフの点は同じ線上にあるので，どちらの時代も同じ割合で家賃が上昇していることになる. したがって, ステートメント 1 は正しくない. 2

・1990 年から 2000 年にかけて家賃はほとんど上昇しなかったが，収入は大幅に増加した. したがって，家賃負担は減少することになり，ステートメント 2 が成立することになる. 2

注

－ 解答が完全に正しくない場合は，解答の最初の要素と 2 番目の要素の両方に 1 点を与えることができます.

－ 受験者が推論を行わない，あるいは誤った推論を行った場合は，無得点とする.